PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
Curso: Mestrado em Eng. Elétrica – **Semestre:** 01/2022
Disciplina: Sinais e Sistemas
Aluna: Karine de Freitas Teixeira

Lista de Exercícios 01

1. **Obtenha a resposta em frequência do sistema a seguir a partir da resposta ao impulso e da aplicação da transformanda de Fourier nestes sinais. Compare com a resposta em frequência obtida a partir da utilização do diagrama de Bode.**

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 20}}$$

2. **Calcule a resposta do sistema a seguir, considerando que a chave é aberta após a acomodação do sistema em funcionamento com a chave fechada. Verifique a resposta encontrada simulando o circuito no software Tinkercad.**

Considerando que o circuito estava com a chave fechada e esta foi aberta apenas a acomodação, o indutor pode ser interpretado a um curto circuito e o capacitor a circuito aberto. Assim para o instante de tempo $t = 0^-$, as tensões e correntes no indutor são expressas por:

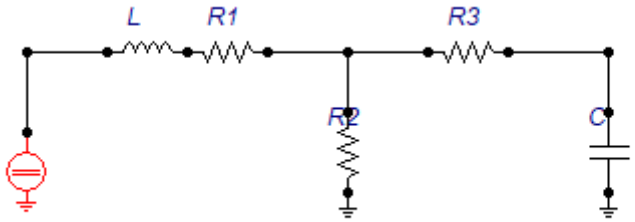


Figura 1: Esquemático do circuito com a chave fechada

$$i_L(t = 0^-) = \frac{V}{R1 + R3} = \frac{10}{1 + 5} = \frac{10}{6}\ A$$

$$V_c(t = 0^-) = V_{R2} = i_L(t = 0^-) * R2 = \frac{10}{6}.5 = \frac{50}{6}V$$

Após a abertura da chave, o circuito representativo passa a ser:

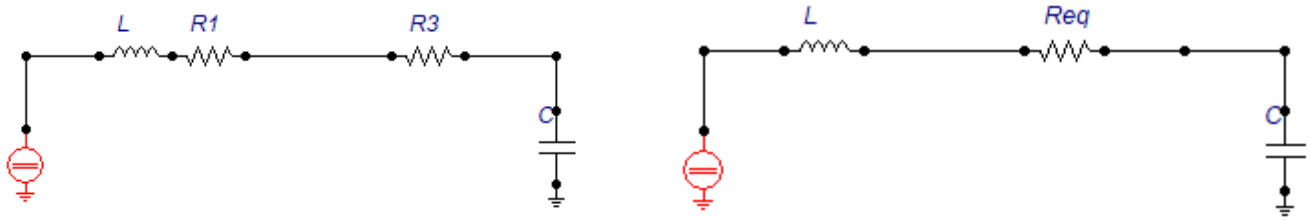
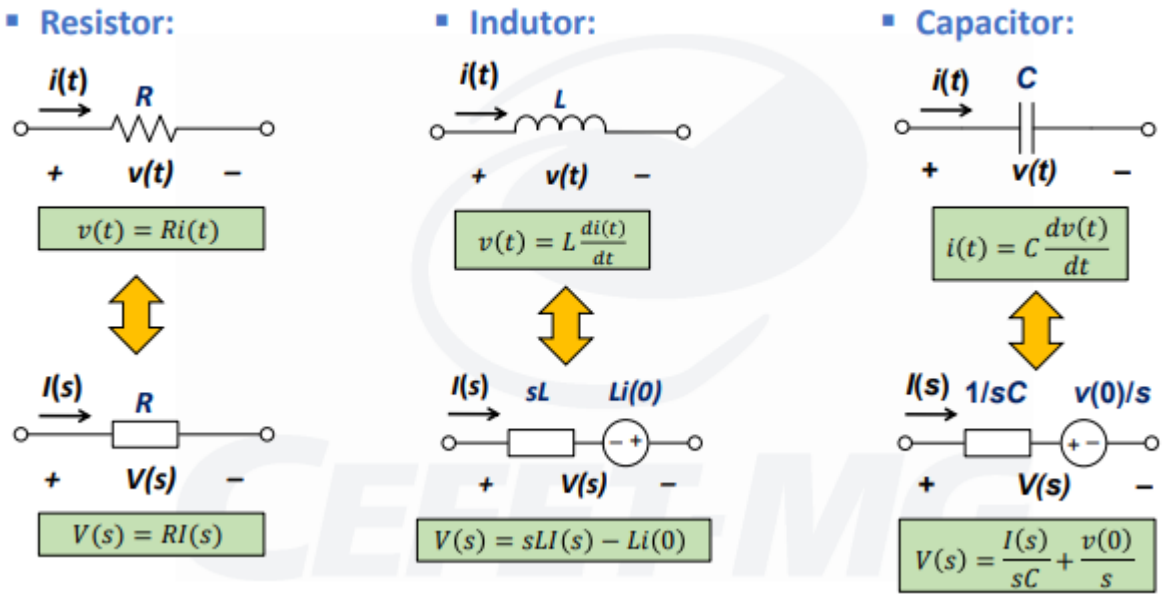


Figura 2: Circuito equivalente após a abertura da chave

Considerando que modelos de elementos de circuito no domínio de Laplace, é dada por:



Transcrevendo este circuito para o domínio de Laplace, tem-se:

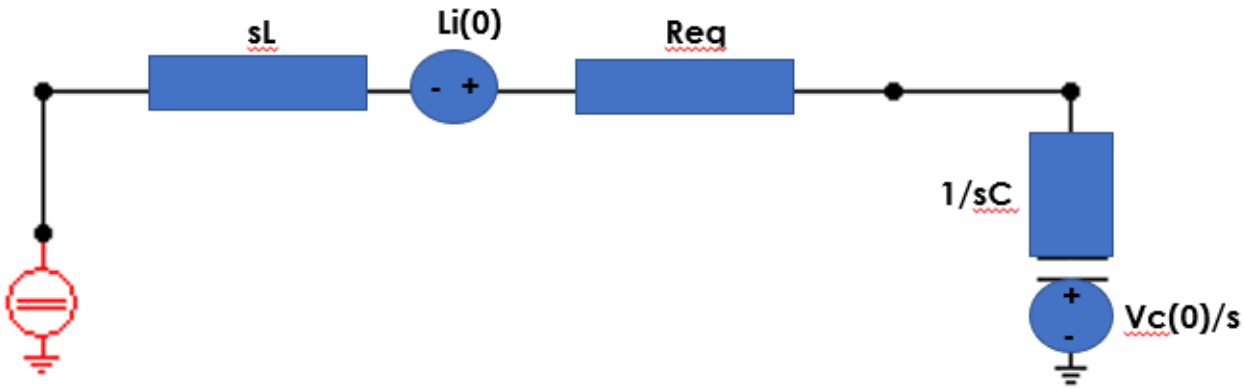


Figura 3: Circuito no domínio de Laplace

Assim aplicando a LKT:

$$-V(s) + sLI(s) - Li(t=0^-) + ReqI(s) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{V_c(t=0^-)}{s}$$

$$I(s)\left(sL + Req + \frac{1}{sC}\right) = V(s) + Li(t=0^-) - \frac{V_c(t=0^-)}{s}$$

$$I(s)\left(\frac{s^2L + sReq + 1/C}{s}\right) = \frac{sV(s) + sLi(t=0^-) - V_c(t=0^-)}{s}$$

$$I(s)(s^2L + sReq + 1/C) = sV(s) + sLi(t=0^-) - V_c(t=0^-)$$

$$I(s) = \frac{sV(s) + sLi(t=0^-) - V_c(t=0^-)}{\left(s^2L + sReq + \frac{1}{C}\right)}$$

Considerando a fonte um degrau com amplitude de 10V, tem-se:

$$V(s) = \frac{10}{S}$$

$$I(s) = \frac{\frac{s10}{s} + s.\frac{1.10}{6} - \frac{50}{6}}{(s^2 + 3s + 5)} = \frac{s.\frac{10}{6} + 10 - \frac{50}{6}}{(s^2 + 3s + 5)} = \frac{s.\frac{10}{6} + \frac{10}{6}}{(s^2 + 3s + 5)} = \frac{10}{6}\frac{s + 1}{(s^2 + 3s + 5)}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace para obter a resposta no domínio do tempo, tem-se que sistemas da forma:

$$\frac{As + B}{s^2 + 2as + c}$$

A transformada inversa de Laplace é dada por:

$$re^{-at}\cos(bt + \theta)\,u(t)$$

Em que:

$$r = \sqrt{\frac{A^2c + B^2 - 2ABa}{c - a^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Aa - B}{A\sqrt{c - a^2}}\right)$$

r =

1.0445

teta =

16.7787

b =

1.6583

Assim:

$$i(t) = \left(\frac{10}{6}\right).1{,}0445e^{-\frac{3}{2}t}\cos(1{,}6583t + 16{,}7787°)\,u(t)$$

Já, $Vc(s)$ é dada por:

$$V_c(s) = \frac{I(s)}{sC} + V_c(t = 0^-)$$

$$V_c(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_c(t = 0^-)}{s} = \frac{10}{6}\frac{s + 1}{(s^2 + 3s + 5)}\frac{.1}{sC} + \frac{50}{6s}$$

Como 1/C = 5

$$V_c(s) = \frac{10}{6}\frac{s + 1}{(s^2 + 3s + 5)}\frac{5}{s} + \frac{50}{6s} = \frac{50}{6}\frac{s + 1}{(s^3 + 3s^2 + 5s)} + \frac{50}{6s}$$

$$V_c(s) = \frac{50}{6}\left(\frac{s+1}{(s^3+3s^2+5s)} + \frac{1}{s}\right) = \frac{50}{6}\left(\frac{s+1+(s^2+3s+5)}{(s^3+3s^2+5s)}\right)$$

$$V_c(s) = \frac{50}{6}\left(\frac{s^2+4s+6}{(s^2+3s+5)s}\right) =$$

A parcela $\frac{s^2+4s+6}{(s^3+3s^2+5s)}$ pode ser reescrita da forma:

$$\frac{50}{6}\left(\frac{C}{s} + \frac{As+B}{s^2+3s+5}\right)$$

Aplicando o método de Heavyside encontra-se para s=0, C = 6/5

Para encontrar A e B, faz-se:

$$\frac{s^2+4s+6}{(s^2+3s+5)s} = \frac{6/5}{s} + \frac{As+B}{s^2+3s+5} = \frac{\frac{6}{5}\cdot(s^2+3s+5)+As^2+Bs}{(s^2+3s+5)s}$$

E tem-se os seguintes sistemas de equações:

$$(I) \quad \frac{6}{5} + A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{5}$$
$$(II) \quad \frac{18}{5} + B = 4 \rightarrow B = \frac{20-18}{5} = \frac{2}{5}$$

Portanto

$$V_c(s) = \frac{50}{6}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{6}{s} + \frac{-s+2}{s^2+3s+5}\right) = \frac{10}{6}\left(\frac{6}{s} - \frac{+s-2}{s^2+3s+5}\right)$$

E aplicando a transformada inversa de Laplace, tem-se

$$\frac{10}{6}\,(6 - re^{-at}\cos(bt+\theta))u(t)$$

Nesse caso:

r =

2.3355

teta_d =

64.6482

b =

1.6583

$$v_c(t) = \frac{10}{6}\left(6 - 2{,}3355e^{-\frac{3}{2}t}\cos(1{,}6583t + 64{,}6482)\right)u(t)$$

Simulação Matlab:

```
%% Questão 2
clc
clear all
close all

A = 1;
B = 1;
a = 3/2;
c = 5;
r = sqrt((A^2*c + B^2 - 2*A*B*a)/(c-a^2))
teta = atan((A*a-B)/(A*sqrt(c-a^2)))
b = sqrt(c-a^2)

dt = 1e-3;
tmax=10;
t=0:dt:tmax;

it = (10/6)*r.*exp(-a.*t).*cos(b.*t + teta);

figure()
plot(t,it,'r')
title('Corrente i_L(t)')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('Corrente (A)')


A = 1;
B = -2;
a = 3/2;
c = 5;
r = sqrt((A^2*c + B^2 - 2*A*B*a)/(c-a^2))
teta = atan((A*a-B)/(A*sqrt(c-a^2)));
teta_d = teta*180/pi
b = sqrt(c-a^2)

vt = (10/6)*(6 - r.*exp(-a.*t).*cos(b.*t + teta));

figure()
plot(t,vt,'r')
title('Tensão V_c(t)')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('Tensão(A)')
```

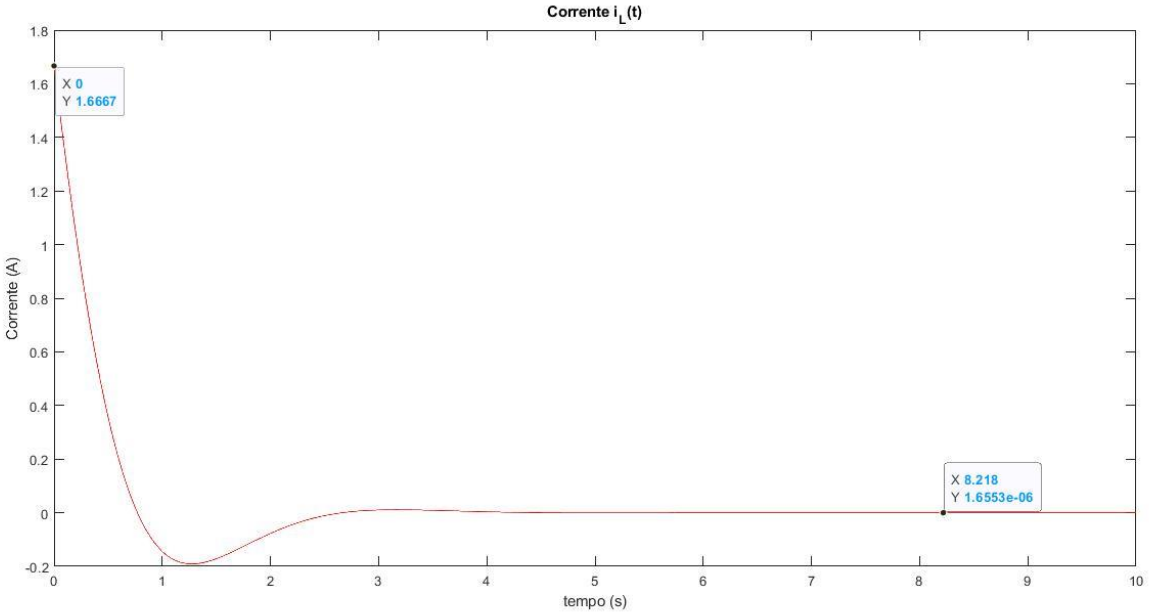


Fig.4: Corrente, $i(t)$, que circula no indutor

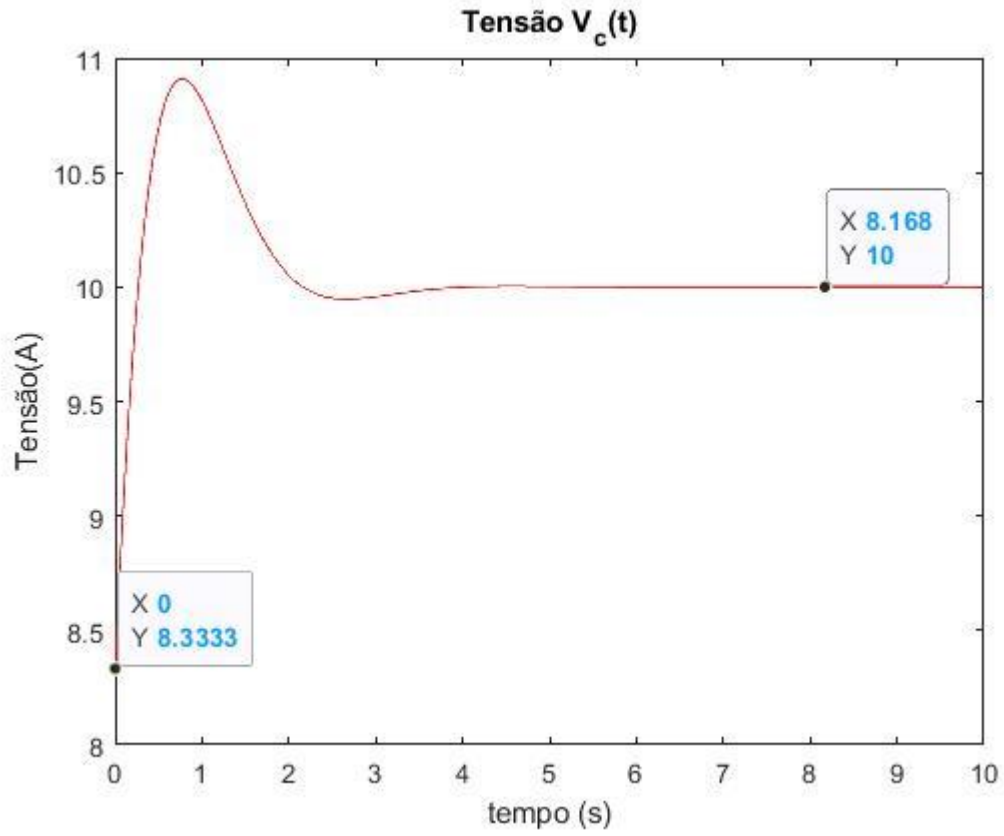


Fig.5: Tensão, $V_c(t)$, vista em cima do capacitor

Simulação Tinkercad:
Link de acesso: https://www.tinkercad.com/things/lrk9vXuIPV4?sharecode=lSTxOHq-j40a11kigpIGS_nDKT98iMhLlLY-0DtKKis

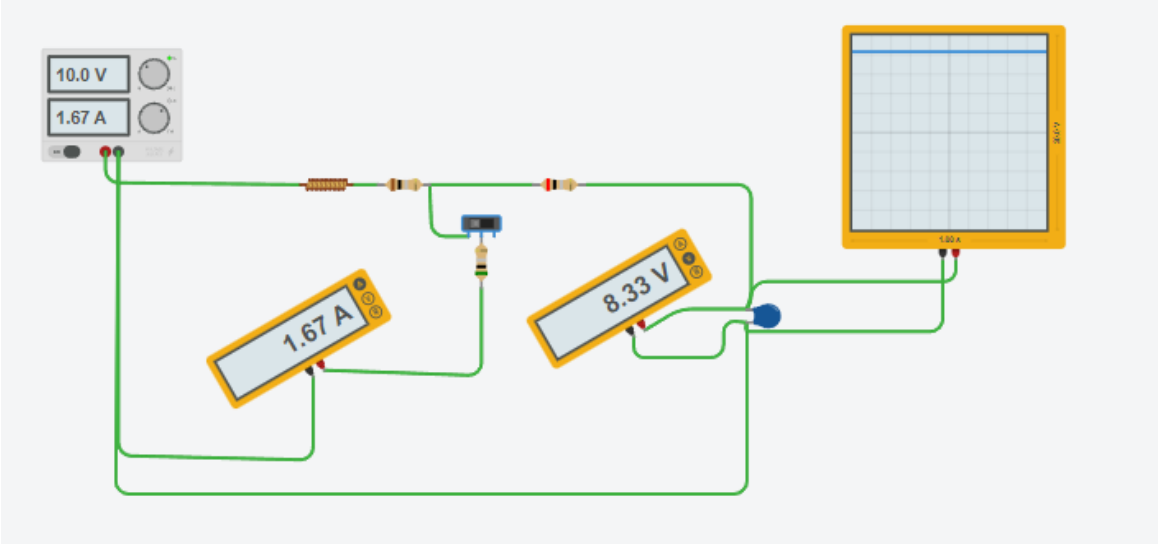


Fig.6: Foto do circuito, na simulação no Tinkercad, no instante de tempo $t = 0^-$

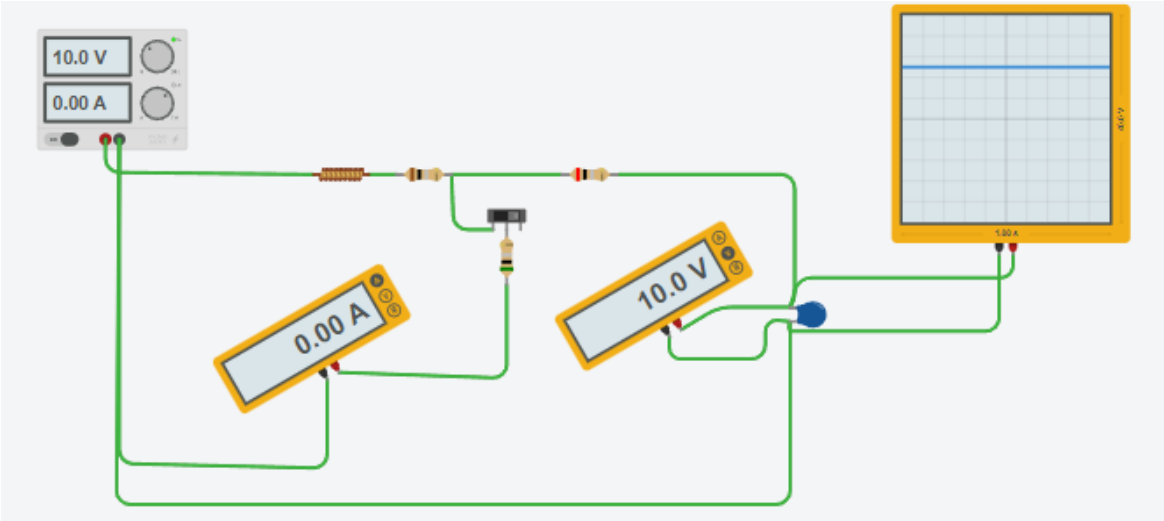


Fig. 7: Foto do circuito, na simulação no Tinkercad, após acomodação

A resposta temporal apresentadas nas figuras 4 e 5 podem ser verificadas a partir das figuras 6 e 7. Observa-se, em ambas as respostas – tanto a simulação do Matlab quanto no Tinkercad – que antes da abertura da chave, considerando que esta estava fechada há bastante tempo e o sistema acomodado, a corrente circulante é igual à $\frac{10}{6}\ A$ e a tensão vista em cima do capacitor igual à $\frac{50}{6}\ V$. Após a abertura da chave, as grandezas passam pelo período transitório até se estabilizarem novamente. Nesse instante a curva de corrente diminui até se estabilizar em $i(t) = 0\ A$, e como não há corrente circulante a tensão no capacitor a partir desse instante passa ser igual a tensão da fonte, isto é, 10 V, tal como é visto na Fig. 7. Quanto a curva de tensão, ela aumenta até se estabilizar em $V_c(t) = 10V$ para t muito grande.